

LXVI олимпиада по математике Эстонии  
ШКОЛЬНЫЙ ТУР ТАЛЛИННА  
Таллинн, 10 января 2019 года  
XII класс

Время, отводимое для решения: 4 часа.

Верное и достаточно обоснованное решение каждой задачи дает 7 баллов.

Пользоваться калькулятором не разрешается.

1. Мама вместе с дочерью и сыном решили посадить на клумбе цветы. Площадь клумбы  $12 \text{ м}^2$ . Сколько понадобится времени для посадки цветов на этой клумбе всем троим при совместной работе, если известно, что, если бы дочь и сын вместе высаживали цветы на этой клумбе, то они не сделали бы это быстрее, чем мама в одиночку. Мама высаживает цветы в два раза быстрее, чем дочь. Сыну понадобилось бы для высаживания цветов на этой клумбе в одиночку не более четырех часов. Если бы мама вместе с сыном высаживали цветы на эту клумбу вдвоем, то им понадобилось бы не менее 1 час 20 минут.
2. Реши систему уравнений: 
$$\begin{cases} 2^x \cdot 3^y = 6 \\ 3^x \cdot 16^y = 48 \end{cases}$$
3. Докажи, что для каждого простого числа  $p > 3$  значение выражения  $p^2 - 1$  делится нацело на 24.
4. В треугольнике  $ABC$   $AB = a$ ,  $BC = b$ ,  $AC = c$ . Прямая  $DE$  пересекает сторону  $AB$  в точке  $D$  и сторону  $BC$  в точке  $E$ , причем делит пополам как площадь треугольника, так и его периметр. Найди длину отрезка  $BD$ .
5. На плоскости проведены 13 прямых. Докажи, что найдется угол между двумя прямыми, величина которого меньше, чем  $14^\circ$ .